人壽保險之增額選擇權評價

林慧如
國立高雄第一科技大學　金融所金融組
U0241827@nkfust.edu.tw

摘要

保險契約賦予保戶許多免費的權利，如：解除契約、豁免保費、增加保額權利、保證更約、提前給付等，其中又以解除契約與增加保險金額兩部份值得更加討論何時執行選擇權才是最佳時刻，國內外文獻較多是探討解約選擇權評價，但其實解約選擇權與增額選擇權是反向關係，在選擇執行增額選擇權之前，必須考慮哪些因素，以及執行此選擇權對保險公司以及保戶帶來的影響為何?本研究利用最小平方蒙地卡羅法加入隨機利率與隨機死力，求算增額選擇權價值，提供保戶了解在什麼條件之下可以執行權利。

關鍵詞：解約選擇權，最小平方蒙地卡羅，增額選擇權。

緒論

建國元年七月，引進第一間壽險公司-華安合群保險公司，於民國 51 年初，政府基於提高國民所得、穩定物價、強化保險機制，核准民營保險公司成立，在這五十個年頭裡，民營保險公司快速成長，人們對保險商品的觀念逐漸提升，接受度提高。依據中華民國人壽保險公會的統計資料顯示，從民國 52 年的人壽保險及年金保險投保率 1.38%上升至民國 102 年的 229.67%，意味著現在台灣每一人至少有 2.3 張保單。但保戶們在投保時是否仔細閱讀保單條款，是否注意到保單額外提供的權利，例如：解除契約、豁免保費、增加保額權利、保證更約、提前給付等。

保險商品的設計大多以十年、二十年期為投保期限，在購買保單時以當時的預定利率作為保費的計算基礎，二十年來收取一致的保費，但隨著利率的變動，保費應該亦有改變。過往保險業提供的保單預定利率高達 7%以上，與目前的保單預定利率 2.2%相比之下是相當優渥的保單。傳統精準保費計算方式：未來的期望給付金額，以預定利率折現計算保費。由此可知，預定利率越高保費越便宜，預定利率越低保費越貴，以現階段台灣的預定利率看來，保費比過往的保單貴。保險公司是否會獲利?，保險業開始茁壯時期，為了拉攏客源，紛紛推出附加於保單內的免費執行權利，這些免費的執行權是否為保險公司的一項成本?

預定利率本質上與保費成反比，預定利率越低保費相對性的越貴，以目前的預定利率來說，屬於偏低的狀態，國人現階段購買新的保單，付出的保險費相對以往來的貴，若保險公司以往的保單有額外提供保戶選擇增加額度的權利，現在的時機點保戶是否該執行?保險公司在計算平準保費時是否該將此項費用列入?

長久以來許多傳統壽險賦與保戶增加額度的權利，但隨著微利時代的來臨，保險公司是否該重視保單額外附加免費權利所帶來的隱含成本，本研究目的希望藉由隨機利率、隨機死力的波動度，精算保單增額選擇權的價值，期望可作為保險公司評估保單發單時的成本或避險策略的考量。另外亦提供保戶了解何謂增額選擇權進而判斷是否執行增額選擇權，不浪費自身的權益。

壹、 文獻探討

一、解約選擇權

購買保單時，賦予許多權益當中以解約的權益較為人知，國內外有許多研究指出保單內其實含有選擇權，解約亦是為解約選擇權，屬於美式賣權，保戶擁有權益將保險契約在任何一個時間點賣回給保險公司，保險公司不得拒絕且保戶可以取得解約後之保單現金價值，但保戶在解約的過程當中是否為有利之時間點。在金融市場上，若市場利率大幅波動時，保戶有可能向保險公司解除保險契約，尤其是在市場利率走升時，保戶會選擇將資金轉向放在可提供更高收益率的金融市場上，此時會造成保戶執行解約選擇權。國內外相關文獻指出保單利率與保險費成反比，

從本研究 3-3 節保險數學公式即可看出利率與保險費成反比的關係，因此若保單預定利率小於實際市場利率時，這時的保險費用相對於新購買的相同保障，付出的保險費用較為高，因而導致保戶傾向於解除保險契約，當預定利率小於實際市場利率時，保險公司其實擁有利差益，但相對性的是擔心保戶會解除保險契約，所帶來的逆選擇、資金運用不利及費用無法攤回。

在解約選擇權文獻當中皆提到，保單利率與保險費用成反比的關係，在預定利率低於市場實際利率時，保險費用相對貴，反之則便宜，這引發作者興趣，有解約選擇權是否就有增額選擇權，保戶有權利在保費貴時解除契約，若現今保費相對是便宜時，是否可執行增加保額的權利。

二、增額選擇權

保單增額選擇權亦是保險公司賦予保戶的免費權利之一，擁有權利利用期初購買時的年紀與費率計價購買增加保險金額，但並不是所有保單皆有此項權利，各家保險公司的險種與商品規定不一樣，若有提供此權利之保險公司大部分規定如下：1.保單需繳費屆滿兩年以上 2.每 N 年提供一次選擇權 3.結婚(限一次)或生子後第一保單週年內提供一次選擇權 4.每次限增購原保額 20%以內，累計最高以承保限額為限 5.原先投保時須為標準體或無體檢件才可申請 6.保單變更為減額繳清保險、展期定期保險或已豁免保費者，不得申請。保戶在選擇執行增額選擇權時，必須支付原保單之保單準備金差額，計算方法會在本研究 3-4 節保險數學公式中提及。

增額選擇權為百慕達選擇權，指買方只能在到期日之前的一個或數個以上特定時間點執行選擇權。解約選擇權與增額選擇權是反向的觀念，一個是縮小保險金額，一個是提高保險金額，亦可解釋解約其實是增購負的保險金額，至於何時執行增額選擇權是較有利之時間點，即是本研究之主軸。

三、數值方法

隨著世代變遷帶動金融商品創新，在評價金融商品價格方面用傳統的模型理論早已無法套用在結構複雜的商品結構，文獻當中最為常見的數值分析，如：樹狀模型、蒙地卡羅模擬法、有限差分法等，蒙地卡羅模擬於 1977 由 Boyle 提出，藉由衍生性商品標的資產價格波動之隨機過程，模擬出多條資產價格之路徑並以無風險利率求解出選擇權估計值，限制運用在具有路徑相依的現金流或收益之資產，在過去大家認為此演算法不適合評價美式選擇權，因為耗用龐大的計算空間與時間，無效率可言，一開始用於評價歐式選擇權價值上。Tilley(1993)利用具有賣權之不分紅股價模擬蒙地卡羅法證明用於美式選擇權的準確性，並提到涉及多因子特性之市場價格只有模擬法是唯一可以滿意處理美式選擇權價值問題的，解決應用在數學上需小心謹慎的複雜偏微分方程，但文章中並未提及選擇權之立即執行與繼續持有之邊界價值。

Longstaff and Schwartz (2001)發表最小平方蒙地卡羅法(LSM,Least Squares Monte Carlo Approach)利用風險中立且價格符合隨機微分方程的股票為例，證明在路徑相依單因子美式選擇權上，有限差分法與最小平方蒙地卡羅法在估計提早執行價值是相似的，標準差在選擇權市場買賣價差水準內。並應用在路徑相依和多因子美式選擇權評價上，這是傳統有限差分法與二項樹法無法做到的，利用回歸分析之最小平方法估計出每條路徑繼續持有的條件期望價值，與蒙地卡羅法模擬出之每條路徑節點上立即執行價值做比較，找出最適之執行點。

樹狀模型最常被應用的為二項樹模型(Binomial Tree Model)又稱為 CRR 模型，最早由 Cox, Ross, and Rubinstein (1979) 推導出，奠定了二項式選擇權評價模型基礎，該模型採用離散時間，股價變動為間斷的，且股價在固定利率與相對應利用風險中立模擬出的機率下只有上漲或下跌的情況，藉由二項式展開後，呈現樹枝狀之樹狀圖，再由每條樹枝的最終兩個點回推估計出期初之選擇權估計值，屬於向後解法(backward solving)。當模擬次數趨近於無窮時，二項樹狀模型即可趨近於 Black-Scholes 的理論價格。

有限差分法為計算偏微分方程的數值方法，將偏微分方程式轉化為差分方程式，用離散變量函數求出與連續變量函數之近似解，再利用節點計算推導出差分方程式之解。有限差分法與二項樹法無法套用在多因子模型，只適合

單因子，二項樹法利率容易會發散，因此本研究選用最小平方蒙地卡羅法為研究方法。

貳、研究方法

本研究架構主要是針對傳統定期壽險隱含增額選擇權之壽險商品，為平準型定期死亡保險，對其隱含之選擇權價值進行評價，此選擇權為百慕達選擇權之買權。具有提前履約性質的衍生性商品，在評價時須先模擬出標的資產之價格路徑，採用 Longstaff and Schwartz(2001)發表的最小平方蒙地卡羅模擬法(Least Squares Monte Carlo Simulation,簡稱 LSM)。

研究對象為 20 年定期不分紅壽險保單，保費繳納型態採取分期繳納方式，為簡化模型本研究只針對純保費部分作為分析基礎，暫不考慮保險公司的管理費用、附加費用。預定死亡率的計算採用「台灣壽險業第五回經驗生命表」為依據，利率隨機過程則用 CIR 利率模型。同時納入瞬間死力隨機過程來計算增額選擇權的價值。

一、保險費計算基礎

保費的定價取決於：預定死亡率、預定利率、及預定營業費用率。本研究為了簡化模型以純保費為研究對象，不討論附加費用率。純保費的計算以預定死亡率與預定利率為基礎。

(一)、預定死亡率：

預定死亡率是指在契約所承保期間內，被保險人發生保險事故之機率。由保險事業發展中心依據壽險業者統計台灣地區人口投保壽險商品之被保險人為母體計算事故發生之人數與年齡，利用「大數法則」(law of large number)編列出經驗生命表，進而求算出預定死亡率。

(二)、預定利率：

預定利率為計算保單價值本息所採用的利率，因為保險契約為長期性契約，在投保期間所繳交之保費會產生利息，應給予折扣。保險公司所收取之每期保費一致，預定利率於契約生效日起固定，預定利率與市場利率相關，若預定利率高於市場利率，保險公司會利差損，反之有利差益，但保險公司不得調高保費，因此預定利率亦可解釋為保險公司對所售出之商品已收取之保費負有保障之最低利率。預定利率之設定是保險公司依照出售之險種特性、過去資金運用績效、對未來投資規劃展望以及社會經濟發展趨勢等因素自行決定。

(三)、預定營業費用率:

保險公司在經營上所需的經費，例如：契約行銷、保單製作、維護…等營業費用都應列入保險費計算之考量，這些營業費用占保險費收入之比率亦即預定營業費用率。此費率由保險公司自行決定，民國九十六年三月一日起金管會要求保險公司應於網站上公開說明商品之預定營業費用率(附加費用率)。

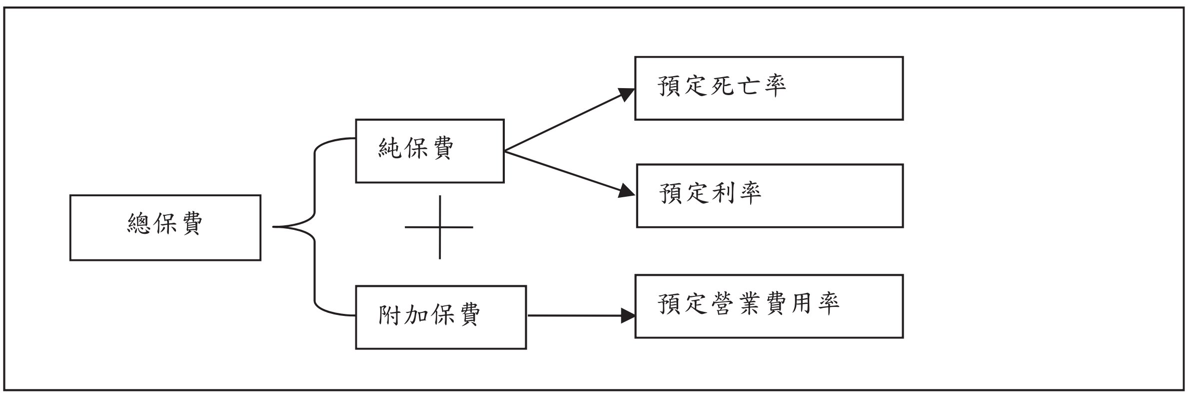

圖 1 保險費計算基礎

純保費之計算是依照「收支相等」原則，在所有投保契約當中收取之保費要足以支應當中發生投保事故時所理賠之保險金額，亦即現金流出量現值等於現金流入量現值。

舉例說明：依照台灣壽險業第五回經驗生命表得知，30 歲女性在一年內的死亡機率為 0.000401，亦即十萬個 30 歲女性在 31 歲前大約會有 40 個人死亡，假設投保金額為 100 萬元，代表保險公司須支出 4 千萬元保險金，若不考慮利息的因素，為了達到保險的公平、互相協助精神，由十萬人均分此保險金，此費用即是每人所需繳納之保險費，30 歲女性投保一年期 100 萬壽險之純保費為 400 元，此為保費收支相等原則。

死亡率、生存率之估計

本研究採用保險發展中心所編制「第五回經驗生命表」為依據利用以往生存及死亡人數之統計，來推估未來死亡人數之機率，作為壽險公司預設死亡機率或生存機率之基礎。以下將介紹生命表基本函數之意義如下：

l_x：生存數，表示從出生至 x 歲時尚存活的人口數。

${}_n d_x$：死亡數，表示在 x 歲時尚生存的人口，經過 n 年之後因死亡而減少的人數。若 n=5，死亡數則為 ${}_5 d_x$，即為生存數 l_x 中從 x 歲至 x+5 歲間因死亡而減少之人數。

${}_n q_x$：死亡機率，表示 x 歲的人存活到 x+n 歲前死亡之機率。

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

x 歲之人在 n 年內死亡的機率。

$${}_{n|m} q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}$$

x 歲之人在 n 到 n+m 年內死亡的機率。

${}_n p_x$：生存機率，表示 x 歲的人存活到 x+n 歲前生存之機率。

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

x 歲之人在 n 年後上生存的機率。

保險數學公式

(一) 平準純保費：

將保險金額、生存率、死亡率、預定利率，帶入下列公式即可求出在保險期間內每期需繳交之平準純保費 P

$$p = I * \sum_{n=1}^{N} ({}_{n-1|1} q_x * e^{-r(0)*n}) / \sum_{n=1}^{N} ({}_{n-1} p_x * e^{-r(0)*(n-1)}) \tag{3-1}$$

(二) 保單準備金：

保單準備金計算方法有兩種，分別為過去法與未來法，本研究利用未來法求得保單準備金。未來的保險金額現值 − 未繳保費現值，將保險金額、生存率、死亡率、預定利率，帶入下列公式即可求出各期之保單準備金。

$${}_t V_{x:\overline{N|}} = I * \sum_{n=1}^{N-t} ({}_{n-1|1} q_{x+t} * e^{-r(0)*n}) - P * \sum_{n=1}^{N-t} ({}_{n-1} p_{x+t} * e^{-r(0)*(n-1)}) \tag{3-2}$$

(三) 保單價值：

將(3-2)公式的預定利率變更為當期之隨機利率，即可求出當年度之保單價值。

$${}_{t}\tilde{V}_{x:\overline{N|}} = I*\sum_{n=1}^{N-t}({}_{n-1|1}q'_{x+t}*e^{-r(t)*n}) - P*\sum_{n=1}^{N-t}({}_{n-1}p'_{x+t}*e^{-r(t)*(n-1)}) \tag{3-3}$$

(四) 保單增額價值：

將(3-3)公式，乘入增購保額之比例，即可求出保單增額價值。

$${}_{t}\tilde{V}'_{x:\overline{N|}} = I*k*\sum_{n=1}^{N-t}({}_{n-1|1}q'_{x+t}*e^{-r(t)*n}) - P*k*\sum_{n=1}^{N-t}({}_{n-1}p'_{x+t}*e^{-r(t)*(n-1)}) \tag{3-4}$$

(五) 保單增購保額收益：

利用(3-4)之值減去增購保額所需支付的保單準備金差額，即可求出保單增購保額收益。

$$Payoff = {}_{t}\tilde{V}'_{x:\overline{N|}} - k*{}_{t}V_{x:\overline{N|}} \tag{3-5}$$

二、最小平方蒙地卡羅

Longstaff and Schwartz (2001)發表出最小平方蒙地卡羅法，結合最小平方估計法(Least Squares Regression)與蒙地卡羅法(Monte Carlo Approach)，適用於路徑相依且多因子之模型，並同時解決原先蒙地卡羅法無法解決之收斂速度方面及無法提前履約的問題。先利用蒙地卡羅法模擬出多條路徑，從每條路徑當中的到期日開始往回推算估計出每個節點立刻執行選擇權的價值，再利用最小平方法估計出繼續持有之條件期望價值，接下來就可以比較每一個路徑可履約節點之立刻執行價值與繼續持有的條件期望值，立刻執行之價值大於繼續持有之價值則選擇執行選擇權，反之則繼續持有，判斷完後將每個立刻執行之價值折現回到期初，並且取其平均值即為選擇權價值，但只在價內路徑上做判斷，從經濟學角度來看，投資者只會在價內時才會做出提早執行選擇權之權利。文中對最小平方蒙地卡羅法提出之先前假設為美式選擇權只有單一價格 X 範圍為(0,∞)並且服從馬可夫過程。進階假設選擇權只能在t_1、t_2時間點履約，且條件期望函數 F(ω;t_1)為絕對連續且滿足下列條件方程式：

$$\int_0^{\infty} e^{-x}F^2(\omega;t_1)dX < \infty$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}F_X^2(\omega;t_1)dX < \infty$$

對於任何 ε>0，皆會存在一個 M < ∞使得

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left[\left|V(X) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i;M,K)\right| > \varepsilon\right] = 0$$

V(X)代表實際的選擇權價格;LSM(ω_i;M,K)代表路徑ω_i在最適履約時點t_k的現金流量折現到期初時點t_0的價值,M 為基底函數的個數，K 為可履約時點的個數。

由上述之先前假設結果可以得知，只要選取的 M 夠大並且讓 N→∞，用 LSM 演算法得到之預估價格與真實的價格之間的誤差值會小於 ε，LSM 演算法可以在任何 ε 為隨意正數之期望方程式收斂，主要的關鍵在於函數F_M(ω;t_1)均勻收斂到條件期望值函數 F(ω;t_1)。此假設為單因子模型，但在多因子條件期望值均勻收斂下能可成立因此利用 LSM 估計出選擇權價格可以合理的代表選擇權之真實價格。

最小平方蒙地卡羅法在估計繼續持有價值時，須考慮到基底函數之選擇，可用的基底函數包含：Laguerre、Hermite、Legendre、Chebyshev、Gegenbauer、Jacobi 等多項式，Longstaff and Schwartz (2001)文中則是以 Laguerre 多項式為基底函數，並提及有些基底函數會使自變數間呈現高度正相關，但不會影響迴歸式的配適值，只要使用正交基底函數即可。因此為了簡化計算過程，本研究在第四章數值分析部分，採用(1,X,X^2)為預估繼續持有價值之基底函數。

參、 數值分析

在估計金融商品之解時大多以 Black and Scholes(1973)公式求得封閉解，但若無封閉解的選擇權則以數值方法來求得近似解。Longstaff and Schwartz(2001)文中提到只要基底函數夠大且模擬次數大，預估之選擇權價格趨近於真實之選擇權價格，因此本研究採用最小平方蒙地卡羅模擬法來估計增額選擇權之價格。

一、研究模型建構

本研究採用 30 歲男性 20 年期不分紅定期壽險，保險金額為 100 萬元，預定利率為 2.25%，模擬次數為 10 萬次。

保險年期 N = 20 年
保險年齡 X = 30 歲
保險金額 I = 100 萬
預定利率 r = 0.0225
增購保額比例 k = 20% (每五年可執行增購保額權利)
模擬次數 M = 10 萬次

CIR 利率模型：$dr = \beta(\theta - r)dt + \sigma_r\sqrt{r}dZ_r$
利率 r ：2.25%
均數復歸速度 β：0.25
長期利率平均數 θ：1.642903%
利率標準差 σ_r：0.572159%
(長期利率平均數與利率標準差資料來源取自台灣經濟新報資料庫(TEJ)，樣本期間為 2005 年 5 月到 2015 年 4 月之台灣銀行、合作金庫、第一銀行，兩年定期存款固定利率所計算出)

死力模擬參數：$\frac{da_t}{a_t} = \sigma_a * dZ_a$
死力波動度 σ_a = 0.02 (參考 Dahl and MØller(2006)提出)

二、模擬過程

結合最小平方法與蒙地卡羅法，先利用蒙地卡羅法模擬出數條路徑，由每條路徑的到期價值往前回推每個可選擇執行履約時點的立刻執行價值，藉由最小平方法估計出繼續持有的條件期望值，將立刻執行價值與繼續持有條件期望值做比較，找出價內可執行之節點，將每條路徑上之價內節點折現回到期初，再取其平均，即可得到增額選擇權價值。本研究利用上述模型建構之參數加入隨機利率與隨機死力過程模擬 10 萬條路徑，求算出增額選擇權價值

藉由(3-1)公式得到此 20 年定期壽險每年須繳交之平準保費 P = 2237 元，再將保費 P 帶入(3-2)公式得到原始保單每期之準備金如圖 2，在圖 2 可以看出保單準備金呈現先遞增後遞減形狀，因保費收取是採平準費率非自然費率，前期收取之保費高於實際自然費率，準備金價值提高，然而到了後期收取之保費低於實際自然費率，準備金部分挪用至彌補差額，如圖 3，隨後開始逐漸遞減至保單到期日為零。將預定利率換成當期之隨機利率即隨機死力帶入(3-3)可得到估計之保單價值。從(3-3)得到之保單價值乘上增購保額比例，即可得到(3-4)保單增額價值，將此得到之保單增額價值減去應支付之保單準備金差額，可得到增購保額收益，找出保單增額價值大於支付準備金差額的價內節點，利用最小平方法估計出每條路徑可執行選擇權之節點上繼續持有條件期望值，模擬步驟如圖 4。比較每條模擬路徑可執行節點的立刻執行 payoff 與繼續持有條件期望值，payoff >holdvalue 者折現回到期初時點，再對所有值加總取其平均，即可得到增額選擇權價值。本研究最終算出增額選擇權價值為 0.8843，代表著增額選擇權買權之權利金，提供保險公司列入保費公平計價時參考數值。

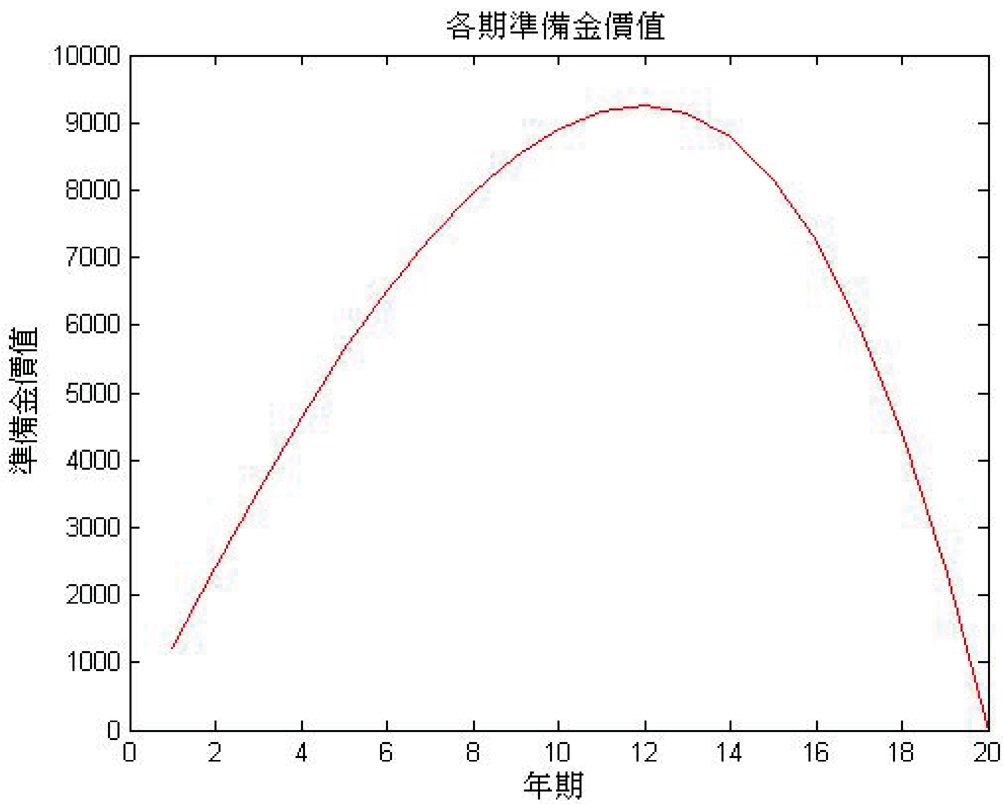

圖 2 各期保單準備金

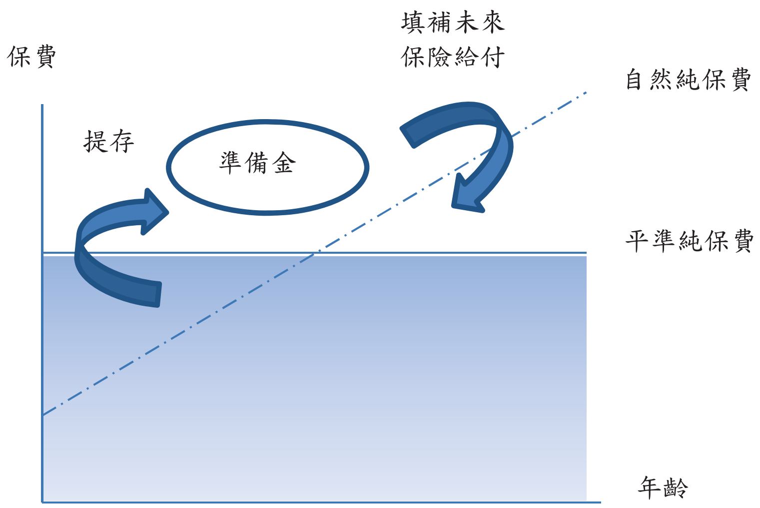

圖 3 準備金來源

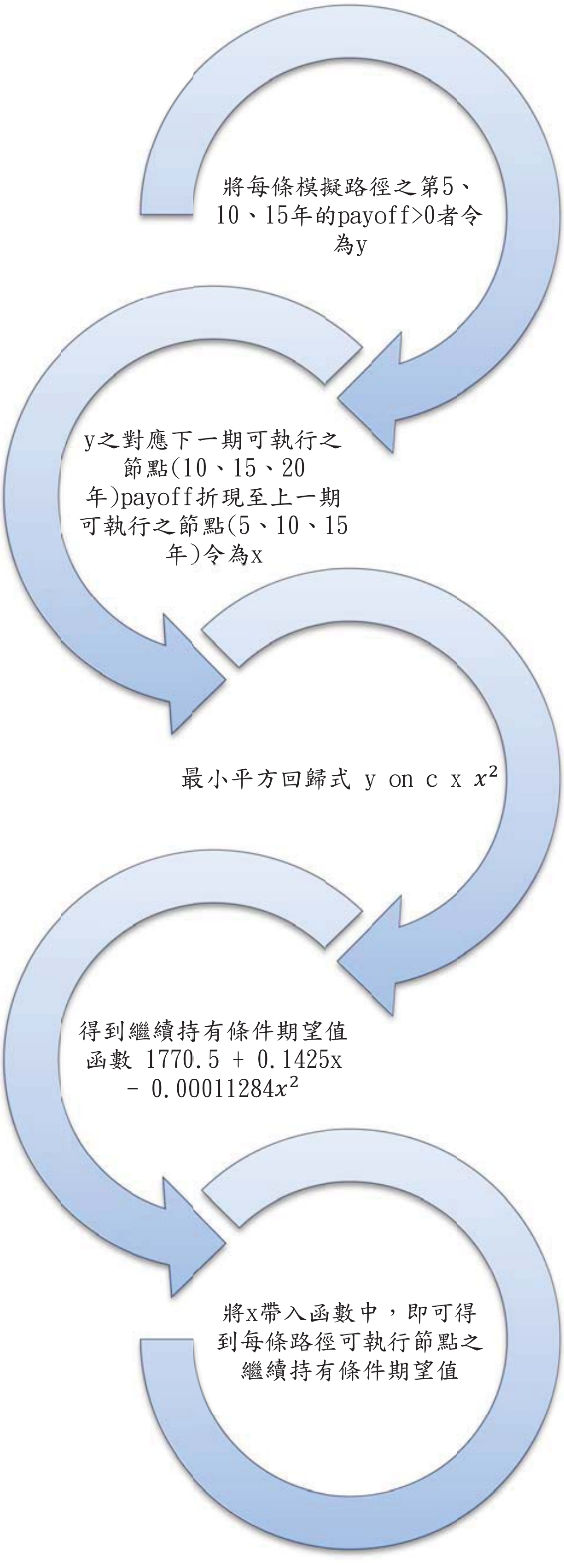

圖 4 最小平方法模擬繼續持有條件期望值

肆、結論

在現代低利率時代，跟過往十、二十年前保單利率相比，很明顯的下降許多，保險公司提供的增購保額權利，在什麼時間點執行較有利? 保險業務員都說遇到增購保額機會時執行就對了，這個費率比較便宜，但，真的是這樣嗎? 過往文獻指出保單預定利率與保險費用成反比，期初購買的保險契約之預定利率大於現今重新購買的保險契約預定利率時，利用本研究 3-3 節保險數學公式驗證確實成反比，此時從新購買保單的費用確實比利用增購保額來的貴，利用最小平方蒙地卡羅模擬法，發現不能單靠預定利率與實際市場利率之間的關係，這只能當作是判斷是否執行選擇權之先前條件之一而已，因為保戶在選擇執行選擇權時，必須支付相對應之保單準備金差額，因此還得考慮到增購保險金額後保單價值增加多少與該付出之保單準備金之間的關係，這道理就像是選擇權買權的履約價格 K，標的資產 S，報酬為 max(S-K,0)，套用在保單增購保額選擇權上，K 等於是可執行之時間點上的應支付保單準備金差額 k* ${}_tV_{x:\overline{N}|}$，S 等於可執行之時間點上保單增額價值 ${}_t\tilde{V}'_{x:\overline{N}|}$，增額收益為 max(${}_t\tilde{V}'_{x:\overline{N}|}$ - k* ${}_tV_{x:\overline{N}|}$，0)，本研究得到結論為，在遇到增購保險金額時間點時，第一先看保單預定利率與市場利率之高低，再來則是衡量應付出之保單準備家差額部分，綜合上述兩個要件，可以提供保戶簡易衡量是否執行選擇權。

保險公司免費提供保戶在特定時點可選擇是否執行增額選擇權，但這項選擇權本身是否列入保險費計價考量之一，在不須任何體檢只要提出申請即可在規定額度內提高保險金額，這樣是否會對保險公司帶來道德風險，以及保險公司是否暴露於利差損，本研究在數值分析部分亦算出增額選擇權價值，可以提供保險公司在未來保險商品計價作為考量，或是對保戶後來的道德風險做規避與經營策略之參考。

參考文獻

(1) 王克陸、許明峰、遲廷俊(2008)，樹狀模型對美式亞式選擇權評價之比較分析，台灣期貨與衍生性商品學刊，6，1-27。

(2) 王毓鍵(2011) 選擇權評價方法於人壽保險公司清償能力預警系統建立之運用

(3) 曹若玹(2005) 可贖回雪球式商品的評價與避險

(4) 陳妙津(2005) 利用最小平方蒙地卡羅法評價百幕達式利率交換選擇權

(5) Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M.(1979) Option Pricing : A Simplified Approach . Journal of Financial Economics 7：pp.229-263

(6) Longstaff, F. A., Schwartz, E. S. (2001) Valuing American Options by Simulation: Simple Least-Squares Approach. Review of Financial Studies 14: pp. 113-147

(7) Tilley, J. A. (1993) Valuing American Options in a Path Simulation Model. Transactions of the Society of Actuaries 45: pp. 83-104